

Recenzja rozprawy doktorskiej

*„Zastosowania Pochodnych Ułamkowych w Elektromagnetyzmie i Teorii
Obwodów”*

autorstwa mgr. inż. Damiana Trofimowicza

Andrzej A. Kucharski

26.06.2026r.

Rozprawa doktorska mgr. inż. Damiana Trofimowicza dotyczy zastosowania pochodnych ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Praca mieści się w dyscyplinie automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologie kosmiczne, a jej zasadniczym przedmiotem jest ocena, które definicje pochodnej ułamkowej mogą być stosowane w modelowaniu układów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych bez prowadzenia do sprzeczności matematycznych lub interpretacyjnych.

1 Problem naukowy i teza rozprawy

Problem naukowy został sformułowany jasno i trafnie. Autor koncentruje się na teoretycznej poprawności stosowania pochodnej Marchaud, a w określonym zakresie także pochodnej Grünwalda–Letnikova, do opisu systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych opisanych w pochodnymi ułamkowego rzędu. Teza pracy głosi, że zastosowanie pochodnej ułamkowej w dziedzinie czasu opartej na definicji Marchaud zapewnia poprawność modelowania matematycznego takich systemów.

Teza jest jednoznaczna i dobrze odpowiada zawartości rozprawy. Autor wyraźnie ogranicza zakres pracy do analizy teoretycznej, nie zaś do eksperymentalnej walidacji modeli materiałowych. Jest to zawężenie uzasadnione w tym sensie, że rozprawa wykazuje spójność przyjętego formalizmu matematycznego, natomiast nie przesądza o fizycznej adekwatności modeli ułamkowego rzędu względem rzeczywistych ośrodków.



2 Rozwiązanie problemu i zastosowane metody

Autor w zasadniczym zakresie rozwiązał postawiony problem. Przeanalizował najważniejsze definicje pochodnych ułamkowych, w tym Riemanna–Liouville’a, Caputo, Liouville’a, Liouville’a–Caputo, Marchaud oraz Grünwalda–Letnikova, a następnie ocenił je z punktu widzenia wymagań elektromagnetyzmu i teorii obwodów. Za kluczowe kryteria przyjął m.in. liniowość, własność półgrupy, poprawne zachowanie funkcji stałej oraz naturalną reprezentowalność w dziedzinie fazorów.

Istotnym elementem argumentacji jest wykazanie, że niespełnienie własności półgrupy może prowadzić do niespójności między opisem w dziedzinie czasu i opisem w dziedzinie częstotliwości. Jest to mocny argument na rzecz wyboru takich definicji pochodnej ułamkowej, które zachowują składanie operatorów w sposób analogiczny do klasycznego rachunku różniczkowego.

Dobór metod należy uznać za właściwy dla rozprawy teoretyczno-obliczeniowej. Autor wykorzystuje analizę matematyczną, równania Maxwella, opis w przestrzeni stanu, teorię obwodów, analizę fazorową, metody FDTD i CN-FDTD oraz algorytm GRPF do analizy stabilności. Praca pokazuje, że autor potrafi identyfikować problem badawczy, formułować kryteria oceny, wyprowadzać modele, implementować metody numeryczne i interpretować wyniki.

Zastrzeżenia budzi natomiast zakres weryfikacji proponowanych metod. Autor porównuje wyniki metod własnych z metodą referencyjną, wywodzącą się z tego samego nurtu badań i związaną z pracami promotora. Takie porównanie potwierdza zgodność numeryczną i poprawność implementacji w ramach przyjętego formalizmu, ale nie stanowi niezależnej walidacji fizycznej. Metoda referencyjna opiera się bowiem na zbliżonych założeniach i podobnych równaniach konstytutywnych o ułamkowym rzędzie. Zgodność dwóch metod rozwiązujących ten sam typ problemu matematycznego nie dowodzi jeszcze, że sam model poprawnie opisuje rzeczywiste zjawiska elektromagnetyczne.

3 Aktualność i znaczenie tematyki

Tematyka rozprawy jest aktualna i ważna. Rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu jest rozwijany jako narzędzie do opisu układów z pamięcią, dyspersją, stratami i nielokalnością. W elektrotechnice i elektromagnetyzmie ma to znaczenie m.in. dla modelowania ośrodków dyspersyjnych, materiałów złożonych, linii transmisyjnych, elementów obwodowych o nietypowej dynamice oraz układów o parametrach rozproszonych. Autor dobrze uzasadnił te kwestie we „Wprowadzeniu”, stanowiącym pierwszy rozdział rozprawy.

Aktualność pracy wynika także z niejednoznaczności samego pojęcia pochodnej ułamkowej. W literaturze funkcjonuje wiele nierównoważnych definicji, a ich bezreflek-

syjne użycie może prowadzić do modeli niespójnych. Rozprawa podejmuje więc problem podstawowy dla dalszego stosowania rachunku ułamkowego w naukach elektrycznych.

4 Oryginalny dorobek autora

Oryginalny dorobek autora polega przede wszystkim na systematycznym określeniu wymagań, jakie powinna spełniać pochodna ułamkowa stosowana w elektromagnetyzmie i teorii obwodów, oraz na wykazaniu, że pochodna Marchaud spełnia te wymagania. Ważnym elementem jest również wskazanie relacji między definicją Marchaud a definicją Grünwalda-Letnikova, co ma znaczenie dla konstrukcji metod numerycznych.

Do istotnych wyników rozprawy należy zaliczyć krytyczne porównanie wybranych definicji pochodnych ułamkowych, analizę roli własności półgrupy i reprezentacji fazorowej, zastosowanie pochodnej Marchaud do równań Maxwella, analizę elementów obwodowych i linii transmisyjnych ułamkowego rzędu, a także rozwinięcie metod FDTD i CN-FDTD dla rozważanych modeli. Autor wykorzystuje również algorytm GRPF do badania stabilności, co wzmacnia część numeryczną pracy.

Znaczenie poznawcze rozprawy polega na uporządkowaniu podstaw teoretycznych stosowania pochodnych ułamkowych w naukach elektrycznych. Znaczenie praktyczne wiąże się z możliwością budowy metod symulacyjnych dla układów opisanych relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. Należy jednak zaznaczyć, że praktyczna przydatność tych modeli wymagałaby dalszego potwierdzenia przez niezależne porównania eksperymentalne lub materiałowe.

Odnosząc się do deklarowanych przez autora najważniejszych osiągnięć rozprawy (strona 80), stwierdzam, że są one zasadniczo zgodne z rzeczywistą zawartością pracy, choć ich znaczenie należy interpretować z uwzględnieniem teoretycznego charakteru rozprawy.

Autor jako główne osiągnięcia wskazuje: określenie warunków aplikowalności pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów, wyprowadzenie analitycznego rozwiązania równań Maxwella w czasie ciągłym z użyciem macierzy przejść stanów, proponowanie uproszczeń funkcji macierzy Mittag-Lefflera, przeprowadzenie symulacji propagacji fali oraz implementację metody GRPF do badania stabilności FDTD, a także implementację bezwzględnie stabilnej metody CN-FDTD dla mediów opisanych relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu.

1. Uznaję te punkty za uzasadnione, jednak za najważniejsze osiągnięcie poznawcze uznaję pierwsze z nich, tj. sformułowanie warunków stosowalności pochodnej Marchaud, co uzasadniłem wyżej. To ta kwestia bezpośrednio wiąże się z tezą rozprawy i stanowi jej zasadniczy wkład teoretyczny.
2. Wyprowadzenie analitycznego rozwiązania równań Maxwella w czasie ciągłym w

formalizmie przestrzeni stanów, jest wartościowe, ponieważ przenosi aparat znany z teorii układów dynamicznych i sterowania do analizy elektromagnetyzmu ułamkowego rzędu. Pozwala to uporządkować opis problemu i budować rozwiązania w kategoriach macierzy przejść stanów. Należy jednak zaznaczyć, że wynik ten obowiązuje w ramach przyjętych relacji konstytutywnych ułamkowego rzędu i założeń modelowych; nie jest sam w sobie walidacją fizycznej poprawności tych relacji.

3. Trzecie wymienione osiągnięcie, dotyczące uproszczeń funkcji macierzy Mittag-Lefflera, ma istotne znaczenie obliczeniowe. Funkcja ta pojawia się naturalnie w rozwiązaniach układów ułamkowego rzędu, lecz jej obliczanie dla dużych macierzy jest kosztowne. Zaproponowane uproszczenia należy więc uznać za użyteczny wkład praktyczny, zwłaszcza w kontekście symulacji dużych problemów elektromagnetycznych. Jednocześnie rozprawa mogłaby pełniej przedstawić ilościową analizę złożoności obliczeniowej oraz ograniczeń skalowalności tych metod – odniosłem się do tego w punkcie "Wady i słabe strony rozprawy".
4. Czwarte osiągnięcie, obejmujące symulacje propagacji fali oraz implementację algorytmu GRPF do weryfikacji stabilności FDTD, jest ważne z punktu widzenia części numerycznej rozprawy. GRPF pozwala analizować położenie pierwiastków równania charakterystycznego i w ten sposób badać stabilność schematu numerycznego. Weryfikacja ta jest jednak przede wszystkim weryfikacją stabilności i poprawności obliczeniowej w ramach przyjętego modelu, a nie niezależnym potwierdzeniem fizycznej adekwatności modelu ułamkowego.
5. Piąte osiągnięcie, tj. implementacja metody CN-FDTD dla mediów opisanych relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu, należy ocenić jako istotne z punktu widzenia techniki obliczeniowej. Rozszerzenie schematu Cranka-Nicolsona na rozpatrywaną klasę problemów jest wartościowe, ponieważ umożliwia obejście klasycznego ograniczenia stabilności metody FDTD. Równocześnie metoda ta jest bardziej złożona implementacyjnie i obliczeniowo, ponieważ wymaga rozwiązywania układów równań oraz obsługi pamięciowego charakteru pochodnych ułamkowych.

Podsumowując, deklarowane przez autora osiągnięcia są uzasadnione i dobrze korespondują z treścią rozprawy. Najsilniejszy charakter ma wkład teoretyczny dotyczący warunków stosowalności pochodnej Marchaud oraz konsekwencji własności półgrupy. Wkład analityczny i numeryczny obejmujący rozwiązania analityczne, uproszczenia funkcji macierzy Mittag-Lefflera, GRPF i CN-FDTD, jest również wartościowy, lecz jego znaczenie należy oceniać przede wszystkim w kategoriach spójności matematycznej, stabilności i efektywności obliczeniowej w ramach przyjętego formalizmu. Nie zastępuje on niezależnej walidacji fizycznej modeli ułamkowego rzędu na podstawie danych eksperymentalnych lub porównania z klasycznymi modelami dyspersyjnymi.

5 Wiedza autora

Rozprawa świadczy o zaawansowanej wiedzy autora. Autor sprawnie posługuje się aparatem rachunku ułamkowego, teorią równań Maxwella, teorią obwodów, opisem w przestrzeni stanu, analizą w dziedzinie czasu i częstotliwości oraz metodami numerycznymi stosowanymi w elektromagnetyzmie.

Wiedza podstawowa obejmuje klasyczny elektromagnetyzm, teorię obwodów, układy dynamiczne i metody różnic skończonych. Wiedza szczegółowa dotyczy pochodnych Marchaud i Grünwalda–Letnikova, funkcji Mittag-Lefflera, metod FDTD i CN-FDTD, kryteriów stabilności oraz modeli konstytutywnych ułamkowego rzędu. Zakres i sposób wykorzystania tej wiedzy potwierdzają przygotowanie autora do prowadzenia badań naukowych.

6 Znajomość literatury

Autor wykazuje dobrą znajomość literatury dotyczącej rachunku ułamkowego, elektromagnetyzmu ułamkowego rzędu, teorii obwodów i metod numerycznych. Nawiązując do pewnej specyficznej tradycji akademickiej, sięga wręcz do starożytności! Korzysta przy tym zarówno z klasycznych monografii, jak i z aktualnych artykułów naukowych. Pozytywnie należy ocenić krytyczny charakter tej analizy: autor nie tylko przywołuje definicje pochodnych ułamkowych, ale także ocenia ich przydatność dla nauk elektrycznych.

Pewnego uzupełnienia wymaga jednak odniesienie do fourierowskiej, czyli spektralnej definicji pochodnej ułamkowej. Autor traktuje relację

$$D^\alpha e^{j\omega t} = (j\omega)^\alpha e^{j\omega t}$$

jako jedną z kluczowych własności pochodnej ułamkowej, wymaganą dla poprawności analizy fazorowej. W literaturze relacja ta bywa jednak również punktem wyjścia do definicji operatora poprzez mnożnik Fouriera, np. w postaci

$$D^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[(ip)^\alpha \hat{f}(p) \right],$$

jak u F. Bagarello, *Fourier transforms, fractional derivatives, and a little bit of quantum mechanics*, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 50(2), 415–429, 2020, wzór (2.2). Warto byłoby szerzej omówić relację między takim podejściem a przyjętą w rozprawie konstrukcją Marchaud/Grünwald–Letnikova.

Brakuje również szerszego odniesienia do klasycznych modeli dyspersyjnych materiałów, które mogłyby stanowić zewnętrzny punkt odniesienia dla modeli ułamkowego rzędu. Dotyczy to zwłaszcza modeli Debye’a, Drudego, Lorentza i Cole–Cole’a, znanych odpowiednio z opisu relaksacji dielektrycznej, przewodnictwa swobodnych nośników, rezonansowej

odpowiedzi związanych ładunków i rozmytego widma czasów relaksacji.

Modele Debye'a, Drudego i Lorentza są co prawda modelami całkowitego rzędu i prowadzą do wymiernych funkcji częstotliwości, natomiast zależności ułamkowe pojawiają się naturalnie przy opisie materiałów o szerokim lub ciągłym rozkładzie czasów relaksacji. Szczególnie istotnym przykładem jest model Cole–Cole'a, w którym klasyczny człon Debye'a $1 + j\omega\tau$ zostaje zastąpiony przez $1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}$. Autor cytuje wprawdzie kilka prac Garrappy dotyczących funkcji Mittag-Lefflera i metod numerycznych rachunku ułamkowego, jednak nie odnosi się do literatury łączącej modele nie-Debye'owskie, zupełną monotoniczność i relaksację dielektryczną, np. do pracy: R. Garrappa, F. Mainardi, G. Maione, "Models of Dielectric Relaxation Based on Completely Monotone Functions", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 19, no. 5, s. 1105–1160, 2016. Fakt, że człony będące odpowiednikami pochodnych ułamkowych pojawiają się w *mianowniku* funkcji odpowiedzi materiałowej nie wyklucza moim zdaniem takiego porównania, o czym pośrednio świadczy wzór (4.7) rozprawy, gdzie w mianowniku funkcji $\psi(j\omega)$ występuje człon $(j\omega)^\beta + a$; ewentualna trudność dotyczy raczej sposobu implementacji takiego modelu w schemacie czasowym niż samej możliwości użycia go jako punktu odniesienia.

Uwzględnienie tego kontekstu pozwoliłoby lepiej określić, czy rozważane w rozprawie modele ułamkowe stanowią fizycznie uzasadniony opis dyspersji materiałowej, czy przede wszystkim formalne uogólnienie klasycznego modelowania.

7 Wady i słabe strony rozprawy

W rozprawie dostrzegłem następujące wady/słabe strony:

1. Najistotniejszym ograniczeniem rozprawy jest brak niezależnej walidacji fizycznej zaproponowanych modeli i metod. Praca potwierdza ich spójność w ramach przyjętego formalizmu, ale nie wykazuje zgodności z wynikami pomiarów ani z alternatywnymi modelami materiałowymi. Weryfikacja przez porównanie z metodą referencyjną opartą na podobnych założeniach ma charakter wewnątrzmodelowy.
2. Jak wspomniano w punkcie poprzednim, pewnym ograniczeniem jest brak szerszej dyskusji definicji fourierowskiej pochodnej ułamkowej. Skoro jednym z podstawowych wymagań jest zachowanie funkcji harmonicznych w postaci

$$D^\alpha e^{j\omega t} = (j\omega)^\alpha e^{j\omega t},$$

należałoby rozważyć, dlaczego własność ta jest w rozprawie traktowana wyłącznie jako kryterium selekcji definicji, a nie jako możliwa definicja operatora w dziedzinie częstotliwości.

3. Brak porównania z modelami Debye'a, Drudego, Lorentza czy Cole-Cole'a utrudnia ocenę fizycznego zakresu stosowalności modeli ułamkowych.
4. Stosunkowo niewielka jest ilościowa analiza kosztów obliczeniowych. Pochodne ułamkowe mają charakter pamięciowy, co powoduje wzrost wymagań pamięciowych i obliczeniowych. Problem ten jest zauważony, ale mógłby zostać omówiony szerzej, zwłaszcza w kontekście praktycznej implementacji metod FDTD i CN-FDTD.
5. Wskazane byłoby jeszcze dokładniejsze wyodrębnienie indywidualnego wkładu doktoranta w prace wieloautorskie, zwłaszcza w zakresie wyprowadzeń matematycznych, implementacji numerycznych i interpretacji rezultatów.
6. Rozprawa wymaga staranniejszej korekty redakcyjnej. W tekście występują drobne literówki, np. „zauwazyć” i „zyskały” na s. 11, „stosowalnosci” na s. 13, „teorii odwodów” na s. 14, „trasmisyjnej” na s. 16, „Riemana-Liouville'a” na s. 22, „zefiniowana” na s. 23 oraz „bezwzględnie” na s. 78. Pojawiają się też drobne niespójności terminologiczne, np. „fast Fourier transformation” zamiast standardowego „Fast Fourier Transform”. Uchybienia te nie wpływają istotnie na ocenę merytoryczną, ale powinny zostać usunięte przed upowszechnieniem rozprawy.

8 Konkluzja

Rozprawa doktorska mgr. inż. Damiana Trofimowicza podejmuje aktualny i ważny problem naukowy. Autor wykazał się dobrą znajomością literatury, zaawansowanym aparatem matematycznym oraz umiejętnością prowadzenia analiz teoretycznych i numerycznych. Teza pracy została jasno sformułowana i zasadniczo wykazana w deklarowanym zakresie, tj. w zakresie spójności matematycznej stosowania pochodnej Marchaud oraz powiązanej z nią pochodnej Grünwalda-Letnikova w elektromagnetyzmie i teorii obwodów.

Najważniejsze zastrzeżenia dotyczą braku niezależnej walidacji fizycznej, ograniczonego odniesienia do klasycznych modeli dyspersyjnych oraz pominięcia szerszej dyskusji definicji fourierowskiej pochodnej ułamkowej. Uwagi te ograniczają siłę wniosków o praktycznej przydatności proponowanych modeli, ale nie podważają wartości rozprawy jako pracy teoretycznej.

W mojej ocenie rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Stanowi oryginalne opracowanie problemu naukowego, świadczy o zaawansowanej wiedzy autora i potwierdza jego umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Pracę zaliczam do kategorii: d/ wyraźnie wykraczająca poza poziom przeciętny (spełniająca wymagania z nadmiarem).

